○教材·教法○

实施变式教学 促进深度学习*

——以“函数零点问题”教学为例

何苗苗

(广东省广州市南海中学,510000)

变式教学是指采用不同设计,变更认知对象的非本质特征,从而让学习者从不同角度、不同侧面暴露过程,在不同背景中进行思辨,达到深入认识所学数学知识的目标. 数学核心素养是数学课程目标的集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,是在数学学习和应用的过程中逐步形成和发展的[1]. 深度学习是指在理解学习的基础上,学习者能够批判性地学习新的思想和事实,并将它们融入原有的认知结构中,在众多思想间进行联系,将已有的知识迁移到新的情境中做出决策和解决问题的学习. 本文以“函数零点问题”的复习教学为例,进行分析探究.

一、教学设计

1. 复习旧知

引导学生完成下表,对已有知识梳理.

表 1:复习函数零点的知识点

函数零点的概念	对于函数 $y = f(x)$,把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数 $y = f(x)$ 的零点
方程的根与函数零点的关系	方程 $f(x) = 0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点
函数零点的存在性定理	函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线,若 $f(a)\cdot f(b) < 0$,则 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内存在零点

2. 判断函数零点所在区间

例 1 设 $f(x) = \ln x + x - 2$,则函数 $f(x)$ 的零点落在那个区间( )

(A) $(0,1)$ (B) $(1,2)$

(C) $(2,3)$ (D) $(2,3)$

解法 1 $\because f(1) = -1 < 0, f(2) = \lg 2 > 0, \therefore f(1)f(2) < 0$ 时,故选 B.

解法 2 作出函数 $g(x) = \ln x, h(x) = -x + 2$ 的图象,两个图象交点的横坐标在区间 $(1,2)$,由图 1 可知 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(1,2)$.

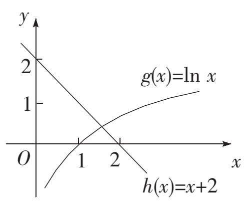

图 1

变式 1 (2010 年上海市高考题) 若 x_0 是方程式 $\lg x + x = 2$ 的解,则 x_0 属于区间( )

(A) $(0,1)$ (B) $(1,1.25)$

(C) $(1.25,1.75)$ (D) $(1.75,2)$

解 构造函数 $f(x) = \lg x + x - 2$,由 $f(1.75) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \lg\frac{7}{4} - \frac{1}{4} < 0$,$f(2) = \lg 2 > 0$ 知 x_0 属于区间 $(1.75,2)$.

变式 2 (2013 年重庆高考题) 若 $a < b$

* 本文系广东省教育科学“十三五”规划 2019 年度中小学教师教育科研能力提升计划项目“学科核心素养导向下深度教学的有效模式研究”(NO:2019YQJK054)研究成果.

$< c$,则函数 $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间(　　)

(A)(a,b) 和 (b,c) 内

(B)$(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

(C)(b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内

(D)$(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

解　由 $a<b<c$,可得 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f(b)=(b-c)(b-a)<0$, $f(c)=(c-a)(c-b)>0$. 显然 $f(a)\cdot f(b)<0$, $f(b)\cdot f(c)<0$,所以该函数在 (a,b) 和 (b,c) 上均有零点,故选 A.

设计意图　本例利用零点存在性定理来确定零点落在某个区间. 第二种方法是用数形结合来解决零点问题,这也是常用的一种数学思想. 变式 1 由方程的根等价于函数的零点问题,从而构造函数,利用零点的存在性定理来解决,侧重于"转化". 变式 2 是更深一步地运用零点的存在性定理.

点评　判断函数零点所在区间的方法:

(1) 当能直接求出零点时,就直接求出进行判断;

(2) 当不能直接求出时,可根据零点存在性定理判断;

(3) 当用零点存在性定理也无法判断时,作出图象判断.

3. 判断函数零点的个数

例 2　(2019 年全国高考题) 函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 上零点的个数为(　　)

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

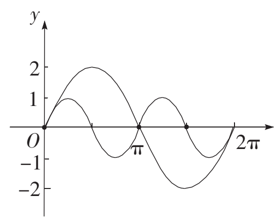

图 2

解法 1　函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 上零点的个数,即 $2\sin x - \sin 2x = 0$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上根的个数. 移项变形得 $2\sin x = \sin 2x$,令 $h(x) = 2\sin x$ 和 $g(x) = \sin 2x$,作两函数在区间 $[0,2\pi]$ 的图象如图 2 所示. 由图 2 可知, $h(x) = 2\sin x$ 和 $g(x) = \sin 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的图象的交点个数为 3 个. 故选 B.

解法 2　因为 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x = 2\sin x(1-\cos x)$, $x\in[0,2\pi]$,令 $f(x)=0$,得 $2\sin x(1-\cos x)=0$,即 $\sin x = 0$ 或 $1-\cos x = 0$,解得 $x = 0,\pi,2\pi$. 所以 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 上零点的个数为 3 个. 故选 B.

变式 1　函数 $f(x) = \log_2 x - \dfrac{1}{x-1}$ 的零点个数是(　　)

(A)0 个　　　(B)1 个

(C)2 个　　　(D)3 个

解析　求 $f(x) = \log_2 x - \dfrac{1}{x-1}$ 的零点个数就是确定函数 $y_1 = \log_2 x$ 与 $y_2 = \dfrac{1}{x-1}$ 图象的交点个数,如图 3,选 C.

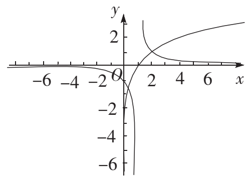

图 3

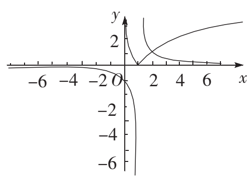

图 4

变式 2　函数 $f(x) = |\log_2 x| - \dfrac{1}{x-1}$ 的零点个数是(　　)

(A)0 个　　　(B)1 个

(C)2 个　　　(D)3 个

解　$f(x) = |\log_2 x| - \dfrac{1}{x-1}$ 的零点个数即函数 $y_1 = |\log_2 x|$ 与 $y_2 = \dfrac{1}{x-1}$ 图象的交点个数,如图 4,选 B.

变式 3　函数 $f(x) = \log_2|x| - \dfrac{1}{x-1}$ 的零点个数是(　　)

(A)0 个　　　(B)1 个

(C)2 个　　　　(D)3 个

解析　$f(x)=\log_2|x|-\frac{1}{x-1}$的零点个数,即函数$y=\log_2|x|$与$y=\frac{1}{x-1}$图象的交点个数,如图 5,选 D.

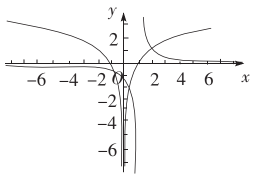

图 5

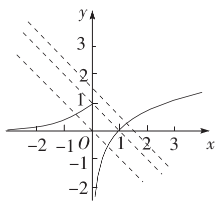

图 6

设计意图　例 2 的第一种方法侧重于转化为确定两个函数图象的交点问题,第二种方法侧重于求根. 引导学生由变式 1 到变式 2、变式 3,促进深度学习.

点评　判断函数零点个数的方法:

(1) 解方程法:令$f(x)=0$,如果能解出几个解,就代表有几个零点;

(2) 数形结合法:转化为两个函数的图象的交点个数问题,但画图时要注意掌握基础函数的图象和图象的变换.

4. 函数零点的应用

例 3　(2018 年全国高考题) 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若$g(x)$存在 2 个零点, 则a的取值范围是(　　)

(A) $[-1,0)$　　(B) $[0,+\infty)$

(C) $[-1,+\infty)$　(D) $[1,+\infty)$

解析　函数$g(x)=f(x)+x+a$存在 2 个零点,即关于x的方程$f(x)=-x-a$有 2 个不同的实根,即函数$f(x)$的图象与直线$y=-x-a$有 2 个交点,作出直线$y=-x-a$与函数$f(x)$的图象,由图 6 可知,$-a\leqslant 1$,即$a\geqslant -1$,故选 C.

变式　(2019 年天津高考题) 已知函数$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x}, x>1.\end{cases}$ 若关于x的方程$f(x)=-\frac{1}{4}x+a(a\in\mathbf{R})$恰有两个互异的实数解,则$a$的取值范围为(　　)

(A) $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$　　(B) $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$

(C) $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$　(D) $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

解　作出函数$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{x}, x>1\end{cases}$以及直线$y=-\frac{1}{4}x$的图象,如图 7 所示.

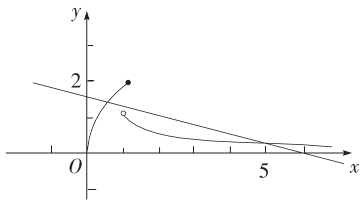

图 7

关于x的方程$f(x)=-\frac{1}{4}x+a(a\in\mathbf{R})$恰有两个互异的实数解,则$y=f(x)$和$y=-\frac{1}{4}x+a$的图象有两个交点,平移直线$y=-\frac{1}{4}x$,考虑直线与$y=\frac{1}{x}$在$x>1$相切,可得$ax-\frac{1}{4}x^2=1$,由$\Delta=a^2-1=0$,解得$a=1$($-1$舍去). 综上可得,$a$的范围是$\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$. 故选 D.

点评　本例是由函数零点求参数范围,其思路是把一个函数拆分为两个基本初等函数,将函数的零点问题转化为两个函数图象的交点问题,体现转化与化归以及数形结合思想,从而体现核心素养中的直观想象.

二、教学感悟

1. 促进学生深度参与

学生从基本问题出发,计算推理,利用图形描述,建立形与数的联系,在"变"中发现"不变",然后形成对这一类型问题的方法归

(下转第 25 页)

的学生都获得属于自己的成功.

(3)课外拓展延伸

课外拓展部分安排五项任务:看,做,练,习,传,要求明确,学生可以自主完成各项任务.其中“看”是观看上传的“对数的概念及相关历史故事”微课,利用数学文化激发他们学习数学的兴趣.“习”是上传“对数的运算”微课,供学生提前预习下一阶段的学习任务.“传”是要求学生各显神通,搜集有关对数的创始人资料以及跟对数相关的材料,并在平台上资源共享,让他们在分享他人劳动成果的同时,也体验到自身奉献的价值.

4.混合式教学考核评价

教学过程中采用基于过程的多元考核评价机制,包括课前线上自主学习、线上教师发起活动的参与度与准确率、在线测试;线下课堂展示、反馈、游戏竞赛以及课后拓展任务完成情况等几个环节.超星学习通对学生所有的学习活动进行实时统计,如在线提问情况、观看课程视频的时长、作业完成质量、测验的成绩等,这些综合成绩可以客观而真实地反映学生利用在线课程平台进行学习的情况,同时有利于教师及时调整教学策略,课堂上做到有的放矢,让对分课堂在落到实处.

5.对混合式教学的一点反思

混合式教学过程中,主要利用教学微课视频、PPT、在线测试等信息技术手段,构建清晰的课程结构,提供明晰的定义、教学方法与教学活动;整个微课程实施以学生为主体,教师在学习过程中起着指引与促进的作用,为学生提供学习支持服务.通过师生交流互动,实时监控线上学习转态,及时解决问题,动态调整教学方案.

参考文献

[1]李挥.“对分课堂”教学模式在高中数学教学中的应用研究[J]. 课程教育研究, 2017 (28).

[2]马力,张琼声.基于对分课堂教学模式的改革探索[J]. 教育教学论坛, 2019 (22).

[3]季付涛.基于学习通的移动教学探索[J].科技资讯, 2018 (17).

[4]张学新.对分课堂:大学课堂教学改革的新探索[J].复旦教育论坛,2014(05).

(上接第 33 页)

纳,从而增强学生的数学能力,提升学生的数学素养,有利于学生的深度参与.

2.助力学生知识迁移

通过变式训练题组,以点带面,引人入胜,帮助学生对问题进行多方面、多角度、多层次的思考,使学生学一题会一类题,做一道题会一串题,从而使备考深化,提高复习的层次和效率,促进学生深度学习.

3.引发学生深度思考

在课堂上,师生互动,生生互动,通过一题多解、一题多变,使学生明白变式的差异;通过一题多解,让学生在探究中总结方法,促进学生的深度思考;通过变式的层层推理,由浅入深,由表到里,不断深化认知,提升能力.让学生参与到变式教学的“变化”中去,使学生学习能够达到触类旁通,举一反三的效果.因此教师在课堂教学中要充分发挥“变式”教学的功能,增强学生转化的思想.

总之,变式教学是数学教学的法宝,从“变”的教学让学生领悟到“不变”的数学知识、数学思想与方法,从而让学生进入深度学习,提高学生的数学素养.但一定要注意防止盲目的变式,要对变式教学进行系统的规划,变式教学要发挥学生的主体性,并且要有延续性,这就要求数学教师认真去研究如何实施变式教学,使学生更好地进行深度学习.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[S].北京:人民教育出版社,2018.

[2]端木彦,孔德鹏.积淀活动经验　创新变式教学:以高三微专题“函数零点”教学为例[J].中国数学教育(高中版),2018(6).